Théorème de Stone-Weierstrass

Leçon : 201, 203, 209, 228
↳ par l'applicat° : thm de Weierstrass

Réf. Hirsch Lacombe

On fixe (X,d) un espace métrique compact non vide, et on note $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$ (⚠ $f : X \to \mathbb{R}$). Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Stone-Weierstrass, cas réel)

Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

On rappelle quelques définitions. Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite :

- séparante, si $\forall (x,y) \in X,\ x \neq y,\ \exists h \in H$ tq $h(x) \neq h(y)$.
- réticulée, si $\forall (f,g) \in H$, alors $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$.

On montre d'abord un lemme puis une proposition.

Lemme 2

On suppose que X contient au moins deux éléments. Soit H une partie de $\mathcal{C}(X)$ vérifiant :

1) $\forall u, v \in H$, $\sup(u,v) \in H$ et $\inf(u,v) \in H$ (ie H réticulée)
2) Si $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tq $u(x_1) = \alpha_1$, $u(x_2) = \alpha_2$.

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Preuve

Soient $f \in \mathcal{C}(X)$. Soit $\varepsilon > 0$.

On fixe un point $x \in X$. Alors pour tout $y \neq x$, il existe un $u_y \in H$ tq $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$. On considère alors $O_y := \{x' \in X : u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$.

Pour tout $y \in X$, O_y est un ouvert (u_y et f sont continues) qui contient y et x. Donc

$$\boxed{X = \bigcup_{x \neq y} O_y.}$$

On X compact, donc par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_n \in X \setminus \{x\}$, tq

$X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$. On pose alors $v_x = \sup(u_{y_1}, \dots, u_{y_n})$.

Par récurrence, il vient que $v_x \in H$.

De plus, $v_x(x) = f(x)$, car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_{y_i}(x) = f(x)$, et

$\forall x' \in X$, $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$.

On fait maintenant varier x. On pose pour chaque $x \in X$:

$\Omega_x = \{x' \in X : v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$.

Ω_x est un ouvert de X contenant x. Par Borel-Lebesgue, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p \in X$ tq X est recouvert par la réunion des Ω_{x_i}. On pose alors $v = \inf(v_{x_1}, \dots, v_{x_p}) \in H$ (↳ Propriété 2.)

Alors, $\forall x \in X$, $f(x) - \varepsilon < v(x) < f(x) + \varepsilon \Rightarrow \|f - v\| < \varepsilon$.

□

Proposition 3 Si H est un sev de $\mathcal{C}(X)$ réticulée, séparant, et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Preuve

Si X contient un seul élément, c'est clair.

Si X contient au moins deux éléments, il suffit de vérifier l'hypothèse 2) du lemme 2.

Soient donc $x_1 \neq x_2 \in H$. H est séparant, il existe donc $R \in H$ tq $R(x_1) \neq R(x_2)$. Soient α_1, α_2 deux réels.

Le système d'équat° $\begin{cases} \lambda R(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda R(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$

admet une unique solut° $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$\begin{cases} (\lambda R + \mu)(x_1) = \alpha_1 \\ (\lambda R + \mu)(x_2) = \alpha_2 \end{cases}$ et par fonctions, $\lambda R + \mu$ sont dans H

car H est un sev et H contient les constantes. □

Ex: l'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

On peut maintenant prouver un lemme final, basé sur le théorème de Dini.

Lemme 4 Il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ à coefficients réels qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \mapsto |x|$.

Preuve

On construit la suite $(P_n)_n$ par récurrence.

$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \end{cases}$

Par récurrence, on montre que $\forall n \geq 0$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$.

- $n = 0$: $0 \leq 0 \leq \frac{1}{2}x^2 \leq |x|$.
- Si c'est vrai au rang n. Alors

$0 \leq P_{n+1}(x)$, et $P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}^2(x))$

≥ 0 car $P_{n+1}(x) \leq |x|$.

et $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}^2(x))$

$= P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(|x| - P_{n+1}(x))(|x| + P_{n+1}(x))$

$= |x| - (|x| - P_{n+1}(x))\left(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\right)$

≥ 0 ≥ 0

$\leq |x|$.

Donc $(P_n)_n$ est une suite croissante et bornée, qui CV donc simplement vers une fonction f tq $\forall x \in [-1,1]$, $0 \leq f(x) \leq |x|$ et par passage à la limite, $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f(x))$

$\Rightarrow f(x) = |x|$.

Par le lemme de Dini, la convergence est uniforme sur $[-1,1]$.

On peut maintenant prouver le théorème 1, qui est finalement une généralisation du lemme 4. □

Preuve (théorème 1)

Si H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes, alors il en est de même que $\bar{H}$.

On va donc montrer $\bar{H}$ est réticulée. Il suffit de montrer que $f \in \bar{H} \Rightarrow |f| \in \bar{H}$, car

$\forall f, g \in \bar{H}$, $\begin{cases} \sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \\ \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{cases}$

et $|f| = \sup(f,0) - \inf(f,0)$.

Soit donc $f \in \bar{H}$ différent de la fonction nulle.

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes qui CVU vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Alors alors $P_n\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \xrightarrow{\|.\|_\infty \text{ CVU}} \frac{|f|}{\|f\|} \left(= \left|\frac{f}{\|f\|}\right|\right)$.

et donc $|f|$ est limite uniforme de la suite $\left(\|f\| P_n\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right)_n$.

Comme $\bar{H}$ est une sous-algèbre, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f\| P_n\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \in \bar{H}$,

et donc $f \in \bar{H}$. Ainsi $\bar{H}$ est réticulée, et H dense dans $\mathcal{C}(X)$.

□

Application : Théorème de Weierstrass.

Si $X \subset \mathbb{R}^d$ est un compact. On pose

$$H = \{ x \mapsto P(x), \text{ avec } P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d] \}.$$

Alors : . H sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$

. H contient les constantes

. H sépare : si $x \neq y \in X$, alors il existe $j \in [\![1,d]\!]$ tq $x_j \neq y_j$, donc $X_j(x) \neq X_j(y)$.

$\Rightarrow H$ dense dans $\mathcal{C}(X)$.

$d=1$, et $X=[a,b]$ → Théorème de Weierstrass.